

**Universidade de Brasília**  
**Departamento de Economia**  
**Disciplina: Economia Quantitativa II**  
**Professor: Carlos Alberto**  
**Período: Verão/10**  
**Terceira Prova**

No sistema de equações diferenciais, sua resolução pode ser encontrada mediante a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}
 |A_2 - r A_1| &= 0 \\
 |A_2 - r_i A_1| C_i &= 0 \\
 Y_p &= -A_2^{-1} B
 \end{aligned}$$

Vamos normalizar com  $C_2 = 1$ .

### Questões

1. Resolva o seguinte programa de controle ótimo:

$$\text{Max. } \int_0^1 (4y - y^2 - x - 2x^2) dt$$

$$\text{s.a. } x' = x + y$$

$$x(0) = 6.16; \quad x(1) \text{ livre}$$

(Esta questão vale sete pontos)

Resposta:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= 0.98 e^{1.732t} - 6 e^{-1.732t} - 0.83 \\
 y(t) &= 0.7174 e^{1.732t} - 16.392 e^{-1.732t} + 0.235 \\
 \lambda(t) &= 1.4347 e^{1.732t} - 32.784 e^{-1.732t} - 2.33
 \end{aligned}$$

2. Na aula de 4 de fevereiro, discutimos a questão do controle ótimo tendo como referência um exemplo sobre o lucro de uma firma que dependia do capital da mesma, sendo a função objetivo da firma o lucro que devia ser maximizado intertemporalmente. Podemos tratar outro item bem atual como as emissões de CO<sub>2</sub> (efeito estufa). Suponhamos que a economia produz bens (o que proporciona utilidade) mas essa produção tem como desdobramento a geração de dióxido de carbono (com impacto negativo sobre a utilidade). Imagine que os benefícios em um momento do tempo estão dados pela seguinte função:  $y - y^2 - x^2$  (onde  $y$  são os bens produzidos e  $x$  é o resíduo em termos de CO<sub>2</sub>. Parte do dióxido de carbono é absorvido pela própria atmosfera (pelas florestas e pelos oceanos). A variação do CO<sub>2</sub> na atmosfera vem dado pela expressão  $x' = y - \beta x$ , onde  $\beta$  é a capacidade de absorção da atmosfera do estoque de dióxido de carbono. Imagine que o ser humano quer maximizar a sua utilidade em um horizonte de 50 anos, mas não quer que, no final desse período, o nível de CO<sub>2</sub> ultrapasse um valor dado (vamos a chamar de  $x^*$ ), valor que possibilitaria que a temperatura média não se eleve mais de 2 graus centígrados. Imagine que a taxa de preferência intertemporal da humanidade seja de 3%.

Com esses dados, formule o programa de controle ótimo, indique a variável de controle, a variável de estado e indique se se trata de um problema de extremo livre ou não.

(Esta questão vale três pontos)

Resposta:

$$\text{Max} \int_0^{50} e^{-0.03t} (y - y^2 - x^2) dt$$

$$\text{s.a. } x' = y - \beta x$$

$$x(0) = x_0 ; x(50) = x^*$$

A variável de controle é  $y$  (a produção de bens e serviços), a variável de estado é  $x$  (o nível de CO<sub>2</sub> na atmosfera) e o programa não é com um ponto de chegada livre.