

Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/02
Segunda Prova

Questões

1. Imagine uma firma que produz dois produtos (Q_1 e Q_2). Para produzir esses dois bens se requer três insumos (I_1 , I_2 e I_3). Para obter cada unidade de Q_1 se requer de duas unidades de I_1 , de uma unidade de I_2 e de uma unidade de I_3 . Para produzir uma unidade de Q_2 se requer uma unidade de I_1 , duas unidades de I_2 e uma unidade de I_3 . Suponha que a firma é maximizadora de lucros e obtém, como lucro, de R\$ 4 por unidade produzida de Q_1 e de R\$ 6 por unidade produzida de Q_2 . Os recursos disponíveis na firma são 180 unidades do insumo I_1 , 160 unidades do insumo I_2 e 100 unidades do insumo I_3 .

Perguntas:

- a) Formular o problema anterior em termos da programação linear (esta questão vale um ponto);
- b) Em termos gráficos, determinar a região factível (esta questão vale 0.5 pontos);
- c) Resolver o problema (esta questão vale 1.5 pontos);
- d) Escrever o dual do problema anterior (Esta questão vale 0.5 ponto)

Respostas

a) $\text{Max. } 4 Q_1 + 6 Q_2$

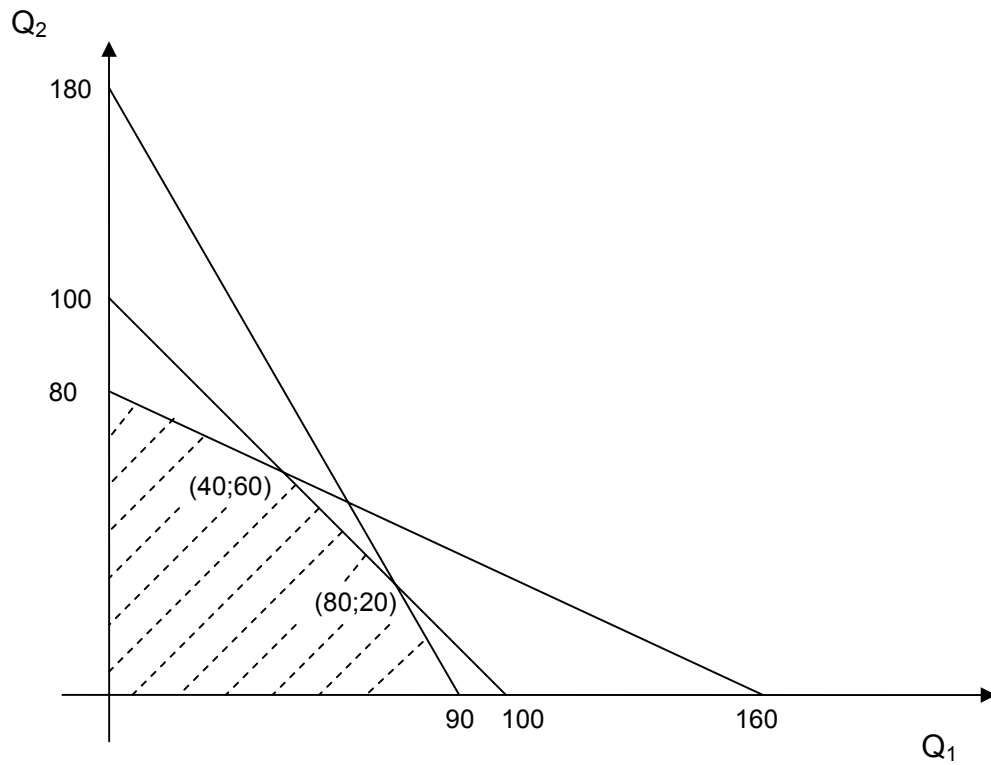
$$\text{s. a. } 2 Q_1 + Q_2 \leq 180$$

$$Q_1 + 2 Q_2 \leq 160$$

$$Q_1 + Q_2 \leq 100$$

$$Q_1 \geq 0; Q_2 \geq 0$$

b) Gráfico



c) A solução está dada pelos pontos $Q_1 = 40$ e $Q_2 = 60$.

d) O dual do problema anterior é:

$$\text{Min. } 180 X_1 + 160 X_2 + 100 X_3$$

$$\text{s.a. } 2 X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$$

$$X_1 + 2 X_2 + X_3 \geq 6$$

2. A programação linear é utilizada em diversos campos ou ciências, não unicamente na economia ou na engenharia. Tomemos um exemplo da medicina. Assim como na economia, na medicina encontramos muitos “trade-off’s” ou conflitos. Suponhamos que pesquisadores estão estudando um novo tratamento para combater uma doença. Esse tratamento combina dois medicamentos (M1 e M2). Ambos têm efeitos colaterais mas também benefícios. Suponhamos que os pesquisadores quantificaram os efeitos colaterais do medicamento M1 mediante o número 3. Ou seja, uma unidade de M1 tem como corolário uma desvantagem (sofrimento para o paciente, por exemplo) que pode ser representado por uma escala cuja magnitude é de 3. O medicamento M2 tem um efeito colateral que foi representado pelo número 1. Uma unidade do medicamento M1 tem uma toxicidade de 400 e a unidade do medicamento M2 uma toxicidade de 1000. A toxicidade máxima que um paciente pode tolerar por dia é de 2000. Esses medicamentos devem combater, por exemplo, bactérias e tem que matar, no mínimo, 3000 bactérias em um dia. Uma unidade do medicamento M1 elimina 1000 bactérias/dia e uma unidade do medicamento M2 também 1000 bactérias/dia. O problema dos pesquisadores é como combinar os medicamentos M1 e M2 (unidades por dia) a fim de reduzir ao máximo o sofrimento do paciente mas respeitando as necessidades curativas (combater as bactérias) respeitando o problema da toxicidade (não matar o paciente pelos efeitos colaterais).

Perguntas:

- Formule o problema em termos de programação linear (esta questão vale 1 ponto);
- Graficamente, identifique a área de factibilidade (esta questão vale 1 ponto);
- Resolva o problema (esta questão vale 1 ponto).

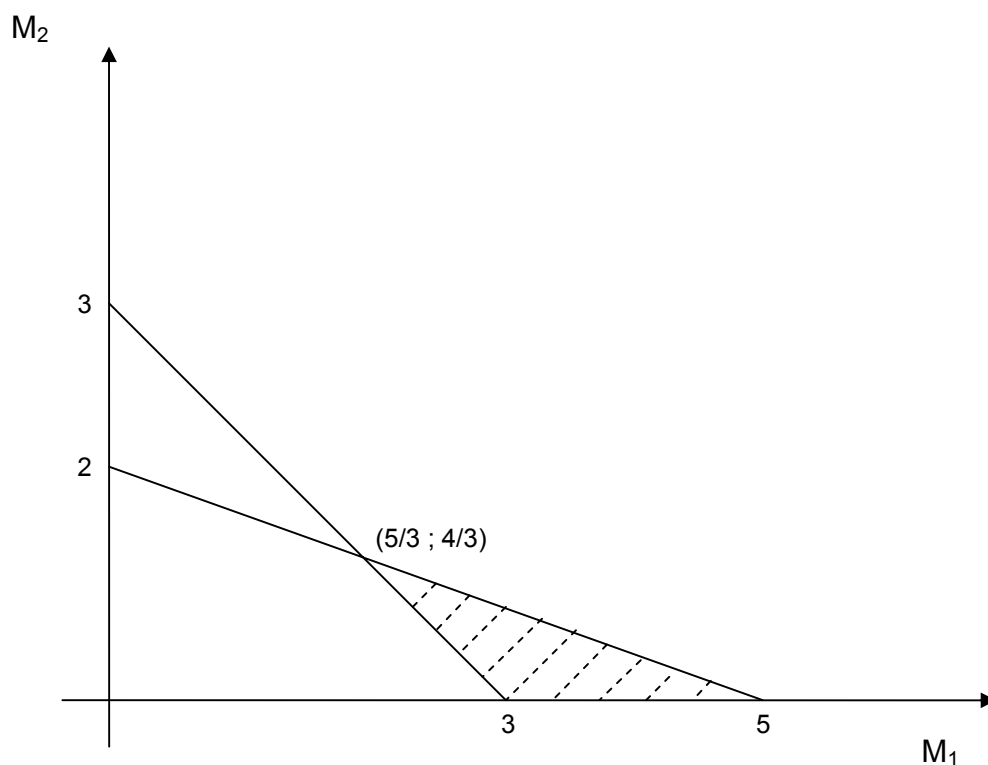
Respostas

a) $\text{Min. } 3 M_1 + M_2$

$$\text{s.a. } 1000 M_1 + 1000 M_2 \geq 3000$$

$$400 M_1 + 1000 M_2 \leq 2000$$

b) Gráfico



c) A solução do problema é $5/3; 4/3$.

3. Imagine o seguinte problema:

$$\text{Max. } 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.a. } 3x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 100$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$$

Resolva esse problema sabendo que a solução do dual é $(1,5; 0,75)$

Esta questão vale 3.5 pontos.

Respostas

O dual do programa anterior é:

$$\text{Min. } 100 y_1 + 100 y_2$$

$$\text{s.a. } 3 y_1 + 2 y_2 \geq 6$$

$$y_1 + 2 y_2 \geq 3$$

$$4 y_1 + y_2 \geq 4$$

$$y_i \geq 0$$

Como a solução desse problema é $(3/2; 3/4)$, a terceira restrição está “folgada”. Assim, podemos eliminar x_3 do primal e a solução do primal é de $x_1 = 25$; $x_2 = 25$ e $x_3 = 0$.