Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa I
Professor: Carlos Alberto
Período: 1/2013.
Primeira Prova

Questões

1. Avalie os pontos críticos (máximos, mínimos ou pontos de inflexão) da seguinte função:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: f' (x) = $\frac{1-\ln x}{x^2}$. Em f' =0 temos que x =e. A segunda derivada é:

$$f''(x) = \frac{2\ln x - 3}{e^3}$$

e f" (e) = $\frac{-1}{e^3}$ < 0. Ou seja, x = e é um máximo.

2. Assuma que a receita total (RT) de uma firma depende do nível produção (Q). Ou seja: RT (Q). Vamos definir a Receita Média (RM) como: RM = RT/Q. Por outra parte, definimos a Receita Marginal (Rma) como sendo RT'. Demonstre que a RM tem um ponto crítico se e só se a Rma é igual à RM.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: derivando RM e igualando a zero temos que:

$$RM' = \frac{RT'Q - RT}{Q^2} = 0$$

Lembrando que RT"= Rma e RM=RT/Q, é fácil concluir que RT'=RM.

3. Seja y(x). Dada a seguinte expressão, encontrar, mediante derivação implícita, y'.

$$4 = x\,e^{x+y} - y\,e^{x}$$

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: derivando implicitamente a expressão anterior temos que:

$$0 = e^{x+y} + x \quad e^{x+y} \quad + x \quad e^{x+y} \; y' \; - y' \quad e^{x} \quad - y\,e^{x}$$

Trabalhando a igualdade anterior temos que:

$$y' = \frac{-e^{x+y} - xe^{x+y} + ye^{x}}{xe^{x+y} - e^{x}}$$

4. Encontre y' mediante derivação logarítmica:

$$y(x) = x^{x+1}$$

(Esta questão vale três pontos)

Resposta: apliquemos logaritmo na expressão anterior:

$$\ln y = (x+1)\ln x$$

Agora derivemos:

$$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x+1}{x}$$

Assim,

$$y' = \left[\ln x + \frac{x+1}{x}\right] y$$

Trabalhando a expressão anterior chegamos a:

$$y' = (\ln x)\, x^{x+1} + (x+1)\, x^{x} = x^{x}\,((\ln x)\, x + (x+1))$$

5. Seja $y(x)$. Realizar uma aproximação quadrática da seguinte expressão em um ponto $x_0 = 0$:

$$x\,y^3 + 1 = y$$

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: derivando implicitamente temos que:

$$3\,x\,y^2\,y' + y^3 = y'$$

Assim: $y' = 1$ (observemos que em $x_0 = 0$, $y = 1$)

Voltando a derivar implicitamente a expressão anterior temos que:

$$3\,y^2\,y' + 6\,x\,y\,(y'')^2 + 3xy^2\,y'' + 3\,y^2\,y' = y''$$

Substituindo os valores correspondentes chegamos a que $y'' = 6$

Dessa forma, a resposta $y(x) = 1 + x + 3\,x^2$