

Universidade de Brasília
Departamento de Economia
Disciplina: Economia Quantitativa II
Professor: Carlos Alberto
Período: 2/2011
Primeira Prova

A solução para uma equação diferencial do tipo: $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ está dada pela seguinte expressão:

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left(Cte + \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx \right)$$

Questões

1. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$y' + y = e^{-x}$$

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: $y(x) = e^{-x} (Cte + x)$

2. Suponha que M seja o montante de dinheiro em um momento t do tempo que um indivíduo possui no banco e que o mesmo esteja composto pela soma do montante inicial ($M(0) = M_0$) somado os ganhos com a taxa de juros i . Logicamente, em qualquer momento do tempo, temos que $M' = iM$. Mediante variáveis separáveis, determine a expressão para $M(t)$.

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: $M(t) = M_0 e^{it}$

3. Suponha que o lucro líquido (L) de uma firma esteja relacionado com os gastos em pesquisa e desenvolvimento da mesma (g). Ou seja, $L(g)$ (o lucro líquido é uma função dos gastos em pesquisa & desenvolvimento). Assuma que o impacto que um aumento de g sobre L está dado pela seguinte expressão:

$$L' = k(a-L); \text{ sendo } k \text{ e } a \text{ dois parâmetros positivos;}$$

Supondo que, partimos de um lucro inicial L_0 , determine a função que vincula lucro a gastos em p&d, ou, em outros termos, identifique $L(g)$.

(Esta questão vale dois pontos)

Resposta: $L(g) = a - (a - P_0) e^{-kg}$

4. Olhe a sua resposta na questão anterior, na medida em que aumentam os gastos em p&d, qual vai ser a tendência dos lucros ?

(Esta questão vale um ponto)

Resposta: na medida em que g aumenta e uma vez que k é positivo, $L(g)$ vai tender a "a".

5. Resolva a seguinte equação diferencial: $x^2 y' + y^2 = xy$

(Esta questão vale 2,5 pontos)

Resposta: $y(x) = x / (\text{Cte} + \ln x)$. O problema é uma equação de Bernoulli, onde $(1-n) = -1$ e temos que: $z' + z x^{-1} = x^{-2}$, sendo, logicamente, $z = y^{1-n}$ $z = y^{-1}$.

6. Dada a seguinte expressão:

$$y' = r y (1-y) \text{ com } r > 0$$

Desenhe o diagrama de fase, encontre os pontos de equilíbrio e caracterize os mesmos.

(Esta questão vale 2,5 pontos)

Resposta: $y'(y)$ é uma parábola e, dado que $r > 0$, sua concavidade é para cima. Os pontos de equilíbrio são 0 e 1, sendo 0 instável e 1 estável.