

**Universidade de Brasília**  
**Departamento de Economia**  
**Disciplina: Economia Quantitativa II**  
**Professor: Carlos Alberto**  
**Período: 2/2014**  
**Primeira Prova**

A solução para uma equação diferencial do tipo:  $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$  está dada pela seguinte expressão:

$$y(x) = e^{-\int a(x) dx} \left( Cte + \int e^{\int a(x) dx} b(x) dx \right)$$

Lembrar que a equação de Bernoulli é:  $z' + (1-n)z a(x) = (1-n)b(x)$

### **Questões**

1. Suponha que  $y(t)$  represente uma população em um momento  $t$  do tempo. Assuma que  $r(t)$  seja a variação (em termos percentuais) dessa população. Ou seja,

$$y' = r y$$

Para simplificar, vamos supor que essa taxa  $r$  seja constante. Dados os valores iniciais  $y(0) = y_0$ , deduza a trajetória temporal dessa população.

(Esta questão vale dois pontos)

**Resposta:** dado  $dy/dt = r y$ , podemos separar as variáveis:

$$dy/y = r dt$$

Integrando temos que:  $\ln y = rt + cte$

Ou seja,  $y(t) = e^{rt} Cte$

Dadas as condições iniciais temos que:  $y(t) = y_0 e^{rt}$ .

2. Vocês estudaram em Introdução à Economia e estão estudando em Micro um elementar modelo de oferta e demanda que pode ser representado pelas seguintes equações:

$$\text{Demanda: } Q_d(t) = \alpha_1 - \alpha_2 P(t)$$

$$\text{Oferta: } Q_s(t) = \alpha_3 + \alpha_4 P(t)$$

Onde:  $\alpha_i > 0$

A função de ajuste de preços (ou seja, a função de ajuste quando a oferta não é igual à demanda ou, em outros termos, quando estamos fora do equilíbrio) pode ser representada da seguinte forma:

$$P'(t) = \alpha_5 (Q_d(t) - Q_s(t))$$

A situação inicial é:  $P(0) = P_0$ .

Em outros termos: quando demanda e oferta são iguais  $P'=0$ , o preço aumenta quando a demanda é superior à oferta e cai quando sucede o contrário.

A partir das três expressões anteriores construa a equação diferencial que representa a trajetória temporal do preço e resolva a mesma.

A partir do resultado indique o equilíbrio do modelo e avalie a estabilidade do mesmo.

(Esta questão vale três pontos)

**Resposta:** a partir das três equações anteriores é fácil chegar a:

$$P' + \alpha_5 (\alpha_2 + \alpha_4) P = \alpha_5 (\alpha_1 - \alpha_3)$$

A solução dessa equação é:

$$P(t) = (P_0 - P_e) e^{-\alpha_5 (\alpha_2 + \alpha_4) t} + P_e$$

Onde  $P_e = \text{preço de equilíbrio} = (\alpha_1 - \alpha_3) / (\alpha_2 + \alpha_4)$

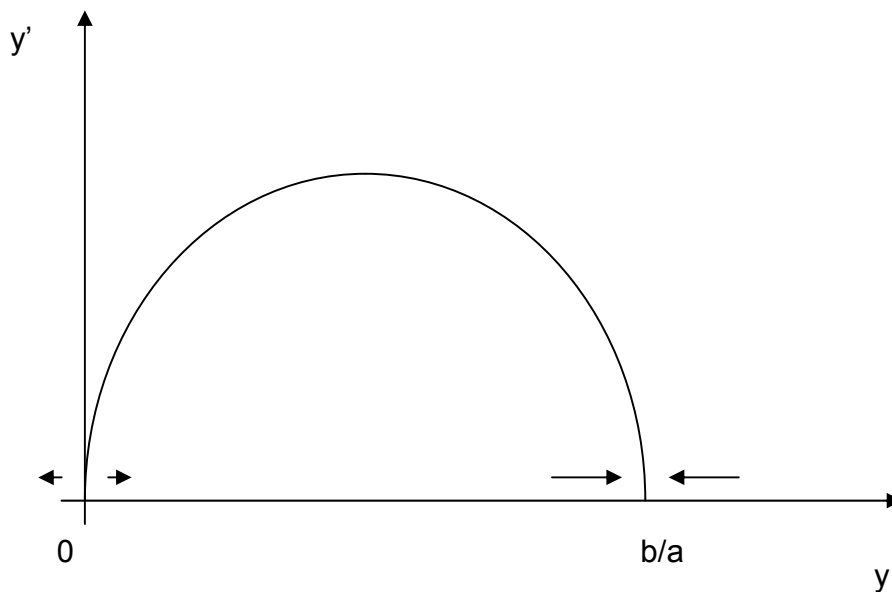
Uma vez que  $\alpha_3$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_4$  são todos positivos, o equilíbrio é estável.

3. Desenhe o diagrama de fase da seguinte equação diferencial:

$$y' = ay - by^2 \quad (a; b > 0)$$

(Esta questão vale um ponto)

**Resposta:**



4. Resolva a seguinte equação diferencial:

$$2y' + yx^{-1} = x^2 y^{-1}$$

(Esta questão vale dois pontos)

**Resposta:** por Bernoulli e fazendo  $(1-n) = 2$  temos que o resultado é:

$$Y(x) = Cte x^{-1} + 0.25 x^3)^{0.5}$$

5. Questão de ANPEC/2014:

“Se a taxa de juros real é 10% e a inflação é 5%, então a taxa de juros nominal é 15,5%”

(Deve se respondido se essa afirmação é falsa ou verdadeira. Não precisa justificar a sua resposta, somente falar se é falsa ou verdadeira. No caso da resposta estar correta ganha um ponto, no caso da resposta estar errada desconto um ponto. O aluno que não responder não ganha nem perde pontos)

**Resposta:** verdadeira. Se a taxa de juros nominal é de 15,5% e a taxa de inflação é de 5%, a taxa de juros real será  $1,155/1,05$ , que é 1,10 ou 10%.

6. Questão de ANPEC/2012:

“Considere a equação diferencial abaixo e julgue a afirmativa:

$$x^2 y' + xy = 1 \text{ (para } x > 0)$$

$y = \ln x/x$  é a solução para o problema com o valor inicial  $y(1)=0$ ”

(Deve se respondido se essa afirmação é falsa ou verdadeira. Não precisa justificar a sua resposta, somente falar se é falsa ou verdadeira. No caso da resposta estar correta ganha um ponto, no caso da resposta estar errada desconto um ponto. O aluno que não responder não ganha nem perde pontos)

**Resposta:** verdadeira.